УДК 519.651.2

Л.П. ВАКАЛ

РІВНОМІРНЕ КУСКОВО-ПОЛІНОМІАЛЬНЕ НАБЛИЖЕННЯ

L.Vakal

UNIFORM PIECEWISE POLYNOMIAL APPROXIMATION

A method and a corresponding algorithm for solving of the uniform piecewise polynomial approximation problem are described. The algorithm is applied to compute best piecewise polynomial approximation with free knots for continuous functions. Received results confirm that knots and approximation error obtained by the algorithm agree with optimal knots and minmaxminmax error. Some algorithm testing results are given.

Запропоновані метод і відповідний алгоритм побудови рівномірного кусково-поліноміального наближення неперервної функції. Виконані обчислення підтвердили, що вузли розбиття та величина наближення, знайдені за цим алгоритмом, практично збігаються з оптимальними вузлами і мінімаксмінімаксною похибкою наближення. Наведені деякі результати тестування алгоритму.

Вступ. Під кусковим наближенням (апроксимацією) розуміють сегментну апроксимацію, що базується на розбитті початкового проміжку наближення функції $f(x)$ на ряд підінтервалів і наближенні $f(x)$ на кожному з цих підінтервалів деяким аналітичним виразом (поліномом, раціональним дробом та ін.).

Кускова апроксимація найбільш зручно реалізується на ЕОМ, якщо на усіх підінтервалах функція наближається аналітичним виразом одного виду. Найчастіше як апроксимуючі вирази використовують алгебричні поліноми. Такі кусково-поліноміальні наближення успішно застосовуються на практиці при розв'язанні багатьох задач обчислювальної математики і техніки. До них належать геометричне моделювання плоских і просторових об'єктів з кусково-гладкими границями, апроксимація розподілу струмів у вібраторах антенних решіток та ін.

Слід зазначити, що за деяких умов кускові наближення можна розглядати як наближення розривними сплайнами відповідного типу. Наприклад, для випадку кускового наближення алгебричними поліномами степеня n аналогом можуть бути розривні поліноміальні сплайни степеня n і дефекту $n+1$.

У цій статті пропонується метод побудови рівномірних кусково-поліноміальних наближень неперервних функцій і ефективний алгоритм його реалізації.

Постановка задачі. Нехай $f(x)$ – функція, неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$; r – натуральне число; $P = \left\{ P_n\left(x\right) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \right\}$ – клас алгебричних поліномів степеня $\leq n$.

Позначимо *T* сукупність розбиттів $\tau = \{\alpha \leq_0 < t_1 < \ldots < t_r \leq \beta\}$ проміжку [α, β] на *r* сегментів $[t_{i-1}, t_i]$ $\left(i = \overline{1, r}\right)$. Точки $t_0,\ t_1, \ldots, t_r$ називаються *вузлами* розбиття. Крім того, позначимо $P_n^{(i)}(x)$ і ρ_i відповідно поліном і величину найкращого рівномірного (чебишовського) наближення функції *f*(*x*) на *i*-му сегменті:

$$\rho_i \equiv L(t_{i-1}, t_i) = \min_{P_n \in \mathrm{P}} \max_{x \in [t_{i-1}, t_i]} \left| f(x) - P_n(x) \right| = \max_{x \in [t_{i-1}, t_i]} \left| f(x) - P_n^{(i)}(x) \right|. \quad (1)$$

В основі побудови чебишовських наближень є роботи видатного українського вченого Є.Я. Ремеза [1].

Кусково-поліноміальне наближення, кожна ланка якого є поліномом $P_n^{(i)}(x)$ найкращого рівномірного наближення функції *f*(*x*) на *i*-му сегменті з відповідною величиною найкращого наближення ρ_i, називається *рівномірним* (*чебишовським*) *кусково-поліноміальним наближенням*. Якщо при цьому виконується нерівність

$$\tilde{\rho} = \max_{1 \leq i \leq r} \rho_i \leq \varepsilon, \quad (2)$$

то таке наближення називається *рівномірним кусково-поліноміальним наближенням із заданою похибкою* ε.

Чебишовське кусково-поліноміальне наближення *n*-го степеня, як зазначалося, можна розглядати як розривний рівномірний поліноміальний сплайн $S_n(x)$ степеня *n* у вигляді

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{r} P_n^{(i)}(x)\, \Theta\left[(x - t_{i-1})(t_i - x)\right], \quad (3)$$

де $\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ – функція Хевісайда.

Розбиття $\tau^* = \{\alpha \leq t_0^* < t_1^* < \ldots < t_r^* \leq \beta\}$ називається *оптимальним розбиттям* проміжку [α, β], а його вузли – *оптимальними вузлами*, якщо

$$L(\tau^*) = \min_{\tau \in \mathrm{T}} \max_{1 \leq i \leq r} L(t_{i-1}, t_i). \quad (4)$$

Враховуючи співвідношення (1), формула (4) матиме вигляд

$$L(\tau^*) = \min_{\tau \in T} \max_{1 \leq i \leq r} \min_{P_n \in R} \max_{x \in [t_{i-1}, t_i]} \left| f(x) - P_n(x) \right|. \quad (5)$$

Отже, величину $L(\tau^*)$ можна назвати *мінімаксмінімаксною похибкою* кусково-поліноміального наближення функції *f*(*x*) на проміжку [α, β].

Було доведено [3], що для довільної неперервної на невід'ємному відрізку [α, β] функції *f*(*x*) оптимальне розбиття існує, хоча може бути і не єдиним. Установлено також, що достатньою умовою оптимальності розбиття є рівність величин найкращих наближень:

$$L\left(t_{i-1}, t_i\right) = L\left(t_i, t_{i+1}\right) \quad \text{для} \quad \forall\, i = \overline{1, r-1}. \tag{6}$$

Слід додати, що при справедливості рівностей (6), рівномірне кускове наближення поліномами непарного степеня функції $f\left(x\right)$, для якої

$$f\left(x\right) \in C^{n+1}\left[\alpha, \beta\right] \ i \ f^{(n+1)}\left(x\right) \neq 0 \text{ для } x \in \left[\alpha, \beta\right], \tag{7}$$

буде неперервним, тобто у цьому випадку сплайн виду (3) буде неперервною функцією [2, с. 20].

Вимога виконання умови (6) була покладена в основу цілого ряду методів та алгоритмів знаходження оптимальних вузлів і побудови відповідних кусково-поліноміальних наближень [4–7]. Наприклад в алгоритмі [5] співвідношення (6) розглядаються як система (r–1)-го трансцендентного рівняння для визначення (r–1)-го вузла $t_1, \ldots, t_{r-1}$ ($t_0 = \alpha$, $t_r = \beta$). Для розв'язання системи застосовується метод Ньютона, необхідна кількість ітерацій якого залежить від вибору початкового наближення. Крім того, на функцію $f(x)$ додатково накладаються обмеження (7).

У противагу алгоритмам, які використовують при знаходженні оптимальних вузлів методи типу Ньютона для розв'язання нелінійної системи рівнянь, алгоритми [6, 7] збігаються для довільно вибраних початкових вузлів, у тому числі рівновіддалених, і зводяться до паралельної побудови послідовності дійсних чисел $L\left(\tau_j\right)$, що збігається до величини $L\left(\tau^*\right)$, і послідовності вузлів τ_j, яка збігається до оптимального розбиття τ^*. Ці алгоритми доволі громіздкі, хоча вони, за твердженням авторів, збігаються досить швидко.

Далі описується розроблений автором метод побудови чебишовського кусково-поліноміального наближення неперервної функції, вузли розбиття і величина сегментного наближення $\tilde{\rho}$ якого практично збігаються з оптимальними вузлами і мінімаксною похибкою наближення $L\left(\tau^*\right)$ відповідно.

Метод побудови рівномірного кусково-поліноміального наближення неперервних функцій. Цей метод є двоетапним і суть його полягає в наступному. На першому етапі визначається мінімальна кількість сегментів r, на які необхідно розбити відрізок [α, β] для отримання рівномірного кусково-поліноміального наближення функції $f(x)$ із заданою похибкою ε. На другому етапі знаходимо сегментне наближення функції $f(x)$ з мінімально можливою величиною наближення $\tilde{\rho} \leq \varepsilon$ за фіксованої кількості сегментів r, але з вільним розташуванням вузлів. Розглянемо кожний з цих етапів методу детальніше.

<u>Перший етап.</u> Процес знаходження мінімального числа сегментів r починається з одного сегмента, тобто $r = 1$, $t_0 = \alpha$ і $t_1 = \beta$. Далі на відрізку $\left[t_0, t_1\right]$ для функції $f(x)$ знаходимо поліном $P_n^{(1)}(x)$ і величину $\rho_1 = L\left(t_0, t_1\right)$ найкращо-

го рівномірного наближення. Якщо $\rho_1 > \varepsilon$, то це означає, що бажана точність апроксимації поліномом заданого степеня *n* на сегменті $[t_0, t_1]$ не може бути досягнута. Тоді відрізок наближення необхідно відповідно зменшити з коефіцієнтом *k*, який визначається за нижченаведеним способом, причому вузол t_0 залишається на місці, а зміщується тільки вузол t_1.

Формулу для визначення коефіцієнта зменшення *k* отримуємо з оцінки похибки сегментного наближення [1, с. 104]. Якщо для функції *f*(*x*) виконуються умови (7) і відношення $\max\left|f^{(n+1)}(x)\right| / \min\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ є досить обмеженим для $x \in [\alpha, \beta]$, то заміна відрізка $[\alpha, \beta]$ деяким сегментом довжиною $(\beta - \alpha)/k$ для того ж самого значення степеня *n* поліному найкращого рівномірного наближення призведе до зменшення відповідної величини найкращого наближення ρ приблизно в k^{n+1} разів, тобто $\rho/\varepsilon = k^{n+1}$. Звідси для обчислення коефіцієнта *k* отримуємо формулу

$$k = \sqrt[n+1]{\frac{\rho}{\varepsilon}}. \tag{8}$$

Уперше нове значення $\tilde{t}_i$ вузла t_i обчислюємо за формулою

$$\tilde{t}_i = t_{i-1} + \frac{\beta - t_{i-1}}{k} \quad \left(i = \overline{1, r-1}\right), \tag{9}$$

де β – початкове значення вузла t_i. У загального випадку, коли зменшення відрізку здійснюється декілька разів, формула має вигляд

$$\tilde{t}_i = t_{i-1} + \frac{t_i - t_{i-1}}{k} \quad \left(i = \overline{1, r-1}\right), \tag{9$'$}$$

де t_i – попереднє значення вузла $\tilde{t}_i$.

Зменшення проміжку $[t_0, \beta]$ згідно з формулами (8), (9) і (9$'$) здійснюємо до тих пір, поки не отримаємо апроксимуючий поліном з величиною чебишовського наближення $\rho_1 \le \varepsilon$. Останнє положення точки $\tilde{t}_i$ приймаємо за остаточне значення t_1 першого вузла розбиття відрізку $[\alpha, \beta]$ на сегменти, тобто кількість сегментів *r* збільшується на 1 (*r* = 2).

Вищеописану процедуру повторюємо для сегмента $[t_1, \beta]$. Якщо при деякому *r* на відрізку $[t_{r-1}, \beta]$ величина чебишовського наближення $\rho_r \le \varepsilon$, то це значення *r* буде шуканим мінімальним числом сегментів. На цьому перший етап методу закінчується.

На другому етапі знаходимо рівномірне кускове наближення на *r* сегментах відрізку $[\alpha, \beta]$ для функції *f*(*x*) поліномами з мінімально можливою величиною сегментного наближення $\tilde{\rho} \le \varepsilon$, де відповідно до позначень формули (2) $\tilde{\rho} = \max\limits_{1 \le i \le r} \rho_i$. Для цього застосовуємо таку ітераційну процедуру: на кожній j-й ітерації задаємо ε_j менше попереднього ($\varepsilon_j < \varepsilon_{j-1}$), будуємо кусково-поліноміальне наближення, для якого величина наближення сегментної апроксимації $\tilde{\rho}_j \le \varepsilon_j$. Якщо на деякій ($j+k$)-й ітерації, де k = 1, 2,..., при побудові кусково-поліноміального наближення з заданою похибкою ε_{j+k} для виконання умови $\tilde{\rho}_{j+k} \le \varepsilon_{j+k}$ буде недостатнім кількості сегментів r, яка визначена на першому етапі, то на цьому ітераційний процес завершується. Тоді шуканим рівномірним кусково-поліноміальним наближенням на r сегментах для функції $f(x)$ буде наближення, отримане на попередній (j+k–1)-й ітерації, величина наближення $\tilde{\rho}_{j+k-1}$ якого буде мінімальною.

Для визначення вузлів розбиття на кожній ітерації другого етапу методу використовувалась та ж сама процедура, що й на першому етапі, а значення ε_j для j-ї ітерації обчислювалось за формулою

$$\varepsilon_j = \lambda \tilde{\rho}_{j\text{-}1} , \tag{10}$$

де λ – коефіцієнт $(0.5 \le \lambda < 1)$, який визначається емпірично і залежить від вимог до точності (опис його вибору наводиться нижче в алгоритмі).

Алгоритм побудови рівномірного кусково-поліноміального наближення неперервних функцій. Вхідні дані для алгоритму, який реалізує вищеописаний метод: n – степінь полінома-апроксиманта на кожному сегменті; α, β – відповідно лівий і правий кінці усього проміжку наближення; ε – значення, яке не повин-но перевищувати похибка сегментного наближення; m – кількість точок сегмен-та, на яких виконується наближення.

Обчислювальна схема алгоритму має такий вигляд:

1. Покладаємо stage = 1. Значення stage дорівнює 1, якщо не знайдено сегментного наближення з величиною $\tilde{\rho} \le \varepsilon$, і дорівнює 2, якщо таке наближення отримано.

2. Покладаємо значення першого вузла $t_1 = \alpha$, номер сегмента i = 1, значення лівого і правого кінців поточного сегмента $\mathrm{eleft} = \alpha$ і $\mathrm{eright} = \beta$ відповідно.

3. Знаходимо значення кроку h наближення і точки $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ i-го сегмента, на яких буде виконуватись наближення, відповідно за формулами

$$h = \frac{\mathrm{eright} - \mathrm{eleft}}{m-1}, \; x_j = \mathrm{eleft} + (j-1) \cdot h \quad \left(j = \overline{1, m}\right).$$

4. На множині точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ знаходимо поліном $P_n^{(i)}(x) = \sum\limits_{j=1}^{n+1} a_{ij} x^{j-1}$

і його величину найкращого рівномірного наближення ρ_i за алгоритмом, описаним в [8] (див. також [1, 5]). Індекс *i* означає номер сегмента.

5. Якщо $\rho_i \le \varepsilon$, то переходимо до п. 7, інакше – до п. 6.

6. Обчислюємо коефіцієнт *k* зменшення інтервалу за більш зручною для програмної реалізації, ніж (8), формулою

$$k = \exp\left(\frac{\ln \rho_i - \ln \varepsilon}{n+1}\right).$$

Нове значення правого кінця *eright* поточного сегмента знаходимо за формулою $\text{eright} = \text{eleft} + \dfrac{\text{eright-eleft}}{k}$ і повертаємося до п. 3.

7. Покладаємо $i = i + 1$, $t_i = \text{eright}$.

8. Якщо $\text{eright} = \beta$, тобто ми досягли кінця проміжку $[\alpha, \beta]$, то переходимо до п. 10, у протилежному випадку – до п. 9.

9. Покладаємо $\text{eleft} = \text{eright}$, $\text{eright} = \beta$ і повертаємося до п. 3.

10. Визначаємо величину наближення $\tilde{\rho}$ кусково-поліноміальної апроксимації на усьому проміжку $[\alpha, \beta]$ за формулою $\tilde{\rho} = \max\limits_{1 \le j \le i} \rho_j$.

11. Якщо stage = 1, то переходимо до п. 12, інакше – до п. 13.

12. Покладаємо число сегментів $r = i$, кількість ітерацій $k = 1$, $\rho_{\text{last}} = \tilde{\rho}$, stage = 2 і переходимо до п. 14.

13. Якщо $i = r$, то переходимо до п. 14, у протилежному випадку – до п. 15.

14. Формуємо матрицю значень коефіцієнтів p_{lj} $\left(l = \overline{1, r-1},\ j = \overline{1, n+1}\right)$ шляхом присвоєння $p_{lj} = a_{lj}$. Вузли поточного розбиття сегмента t_l заносимо в масив значень T: $T_l = t_l$ $\left(l = \overline{1, r}\right)$. Покладаємо $\rho_{last} = \tilde{\rho}$, $k = k + 1$, $\varepsilon = 0.99 \cdot \tilde{\rho}$ (або $\varepsilon = 0.999 \cdot \tilde{\rho}$) і переходимо до п. 2.

15. Алгоритм закінчує роботу і на друк виводяться: кількість сегментів r–1; вузли розбиття T_l $\left(l = \overline{1, r}\right)$; матриця коефіцієнтів p_{lj} $\left(l = \overline{1, r-1},\ j = \overline{1, n+1}\right)$ апроксимуючих поліномів на усіх сегментах; величина сегментного наближення ρ_{last}.

Для перевірки ефективності запропонованого алгоритму виконані розрахунки для функцій, оптимальні вузли величина і кускове-поліноміального наближення яких відомі з літератури як результати аналогічних обчислень за алгоритмами інших авторів.

Для порівняння нижче у таблиці наводяться результати наближення функції $f(x) = \sqrt{x}$ на відрізку [0, 1] поліномами 3-го степеня, отримані за алгоритмом, описаним у цій статті, та за алгоритмом [6]. Легко пересвідчитись, що наведені у таблиці результати практично збігаються.

Висновки. Перевірка на багатьох тестових прикладах показала ефективність запропонованого алгоритму побудови кускового наближення поліномами n-го степеня для апроксимації довільної неперервної функцій, яка задовольняє умови (7) і значення величини (n+1)-ї похідної якої є досить обмеженим. Для такої функцій знайдені вузли розбиття та величина кусково-поліноміального наближення практично збігаються відповідно з оптимальними вузлами і мінімаксмінімаксною похибкою наближення.

ТАБЛИЦЯ. Наближення функції $f(x)=\sqrt{x}$ на [0, 1] поліномами 3-го степеня

<table>
<tr><th rowspan="2">Число сегментів</th><th colspan="3">Результати наближення за алгоритмом [6]</th><th colspan="3">Результати наближення за алгоритмом, описаним у статті</th></tr>
<tr><th>Вузли розбиття</th><th>Величина сегментного наближення $\tilde{\rho}$</th><th>Величини наближень ρ_i на кожному сегменті</th><th>Вузли розбиття</th><th>Величина сегментного наближення $\tilde{\rho}$</th><th>Величини наближень ρ_i на кожному сегменті</th></tr>
<tr><td>2</td><td>0.0
0.0430
1.0</td><td>0.00953</td><td>0.00953
0.00935</td><td>0.0
0.0425
1.0</td><td>0.00947</td><td>0.00947
0.00943</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0
0.00458
0.1142
1.0</td><td>0.00334</td><td>0.00311
0.00334
0.00325</td><td>0.0
0.00503
0.1149
1.0</td><td>0.00326</td><td>0.00326
0.00312
0.00322</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.0
0.000921
0.0216
0.1878
1.0</td><td>0.00140</td><td>0.00139
0.00138
0.00139
0.00140</td><td>0.0
0.00093
0.0218
0.1871
1.0</td><td>0.00141</td><td>0.00140
0.00139
0.00137
0.00141</td></tr>
</table>

1. *Ремез Е.Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев.: Наук. думка, 1969. – 623 с.
2. *Попов Б.А.* Равномерное приближение сплайнами. – Киев.: Наук. думка, 1989. – 272 с.
3. *Lawson C.L.* Characteristic properties of the segmented rational minmax approximation problem // Numer. Math. – 1964. – **6**, N 4. – P. 293–301.
4. *Вершик А.М., Малоземов В.Н., Певный А.Б.* Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация // Сиб. мат. ж. – 1975. – **XVI**, № 5. – С. 925–938.
5. *Вопросы* теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач. – Л.: Из-во Ленинигр. ун-та, 1977. – 192 с.
6. *Nürnberger G., Sommer M., Strauss H.* An algorithm for segment approximation // Numer. Math. – 1986. – **48**, N 4. – P. 463–477.
7. *Meinardus G., Nürnberger G., Sommer M., Strauss H.* Algorithm for piecewise polynomials and splines with free knots // Math. of Computation – 1989. – **53**, N 187. – P. 235–247.
8. *Олександренко В.Л., Порханова А.О.* Побудова чебишовського поліноміального наближення функції однієї змінної за методом підвищуючої дії // Автоматика. – 1967. – № 4. – С. 87–94.

Отримано 20.02.2006